



Isomorfismos, grupos diedros y cuadrados mágicos

Isomorphisms, Dihedral Groups and Magic Squares

Sergio G. Acosta¹

Primitivo B. Acosta-Humánez²

Antony J. Leonardo³

Resumen

Álgebra abstracta es una asignatura compleja dentro del pensum de cualquier licenciatura en matemáticas debido a la falta de ejemplos y aplicaciones en situaciones concretas, los cuales son el común denominador entre los libros y los cursos de álgebra abstracta. Con esta investigación se pretende dar una visión diferente al tema de los isomorfismos de grupos finitos no abelianos, ya que este tema se hace un poco complicado de entender para algunos estudiantes del curso de Álgebra abstracta. Con los cuadrados mágicos, que en adelante llamaremos matrices mágicas, se presenta una oportunidad para contextualizar elementos del álgebra abstracta en situaciones cotidianas. Esta investigación está dirigida, tanto a docentes como a estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas orientada a la Educación Secundaria, y en esta presentaremos un isomorfismo entre el grupo diedral y los llamados cuadrados mágicos. Se darán técnicas basadas en álgebra para construir cuadrados mágicos de distintas dimensiones.

Palabras clave: cuadrado mágico, grupo diedro, isomorfismo.

Abstract

Abstract algebra is one of the most complex subjects within the curriculum of any mathematics degree due to the lack of examples and applications in concrete situations, which are the common denominator between books and abstract algebra courses. This research aims to give a different vision to the subject of non-abelian finite group isomorphisms, since this subject is a bit complicated to understand for some students of the abstract algebra course. With magic squares, which from now on we will call magic matrices, an opportunity is presented to contextualize elements of abstract algebra in everyday situations. This research is aimed both at teachers and students of the degree in mathematics oriented to secondary education and in this we will present an isomorphism between the dihedral group and the so-called magic squares. Algebra-based techniques will be given to construct magic squares of different dimensions.

Keywords: magic square, dihedral group, isomorphisms.

¹ Lycée Français Louis Pasteur; Correo electrónico: acosta.sergiogabriel@lfbogota.com

² Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña, primitivo.acosta-humanez@isfodosu.edu.do, ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-5627-4188>.

³ Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña, Recinto Emilio Prud'Homme, Santiago, RD. [mailto: 201730327@issu.edu.do](mailto:201730327@issu.edu.do)» 201730327@issu.edu.do

1. Introducción

Como disciplina matemática, Álgebra abstracta, también llamada álgebra moderna o álgebra estructural, denota la nueva imagen del álgebra que surgió a principios del siglo XX. Se presentó por primera vez en la historia en el libro de texto *Moderne Algebra* (Waerden 1930) que «invirtió la jerarquía conceptual del álgebra clásica» (Corry 2016) al poner las estructuras algebraicas en primer plano y ver las propiedades de los números, polinomios, etc., como consecuencias de lo que se conoce sobre estructuras generales y no al revés.

En un contexto educativo, Álgebra abstracta generalmente designa un curso de pregrado de división superior que generalmente se requiere para las especialidades de matemáticas y se centra en las estructuras de grupos, anillos y campos. En general, los estudiantes lo encuentran al completar cursos de Álgebra lineal. Los cursos de Álgebra abstracta se imparten así en programas tradicionales de Licenciatura en Matemáticas puras o de Licenciatura en Matemática orientada a la Educación Secundaria en República Dominicana.

En Charris et. al. (2013), ver también Acosta-Humánez (2003) y Wussing (2007), se encuentran los fundamentos teóricos de un curso de grado en Álgebra abstracta tales como los concepto de grupos e isomorfismos, entre otros. Sin embargo, aunque se coloquen ejemplos, no es fácil para los estudiantes. Estudiosos de la física teórica han encontrado en el Álgebra abstracta un apoyo para avanzar científicamente en mecánica cuántica tal y como se evidencia en Acosta-Humánez (2010).

En los cursos tradicionales de Álgebra abstracta para matemáticos no hay aplicaciones y tampoco una motivación clara para el estudiante. Esta problemática se ha estudiado desde hace más de veinte años por Dubinsky et. al. (1994) y recientemente por Fukagua-Connelly et. al. (2016), Bosch et. al. (2018), Hausberger (2013, 2017, 2020),

El principal problema que abordaremos aquí es la dificultad que tienen los estudiantes de licenciatura en matemáticas (puras o con orientación a la educación secundaria) para comprender los conceptos básicos del Álgebra abstracta. Como elemento integrador y motivador para introducir tales conceptos utilizaremos un elemento de la matemática recreativa denominado cuadrado mágico.

2. Fundamentación teórica

De acuerdo con Charris et. al. (2013), un grupo es una estructura algebraica formada por un conjunto no vacío equipado de una operación con la cual cumple que es ley de composición interna (propiedad clausurativa), que satisface además las propiedades asociativa, existencia de elemento neutro y simétrico. Si además se cumple la propiedad conmutativa, se dice que el grupo es abeliano. El grupo de simetrías de un polígono se denomina grupo diedro.

Asimismo, Charris et. al. (2013) definen isomorfismo de grupos a través de la siguiente secuencia de conceptos:

Un homomorfismo de grupos es una aplicación definida de un grupo a otro, en donde la imagen de la composición coincide con la composición de las imágenes. Si el primer grupo de partida coincide con el segundo, se dice que la aplicación es un endomorfismo de grupos.

Un homomorfismo inyectivo es monomorfismo. Un homomorfismo sobreyectivo es epimorfismo. Un homomorfismo biyectivo es isomorfismo. Un automorfismo es un isomorfismo que es endomorfismo.

Por otro lado, un cuadrado mágico es un arreglo cuadrado (matriz), en donde todos los elementos por filas, columnas y diagonales son invariantes bajo una operación definida. El concepto de cuadrado mágico es muy antiguo, muy conocido desde la antigüedad (siglos antes de Cristo) y que aún tiene vigencia en estos tiempos, tal como se evidencia en Everitt et. al. (2020).

3. Metodología

Esta investigación corresponde a la línea de nuevos conocimientos en ciencias básicas, en particular, nuevos conocimientos en matemáticas, implementable a la enseñanza en secundaria. Se seleccionó un estudiante de Álgebra abstracta que tuvo dificultades en aprender los conceptos del Álgebra abstracta, se le dio la temática de los cuadrados y se le hizo seguimiento durante la asignatura.

Parte de la investigación es del tipo nuevos conocimientos, enmarcada dentro del proyecto «Conjeturas en Álgebra, Combinatoria, Integrabilidad y Aritmética», proyecto aprobado por ISFODOSU en 2019.

El método utilizado es principalmente el método científico en matemáticas, el cual consiste en conjeturar y demostrar.

Adicionalmente se utilizó investigación etnográfica haciendo seguimiento a estudiantes de Álgebra abstracta, uno de ellos es coautor de este trabajo.

4. Resultados

Dentro de los resultados teóricos obtenidos en esta investigación, los cuales corresponden a nuevo conocimiento, se encuentran:

1. Formalismo abstracto del proceso de construcción de cuadrados mágicos generalizados, mediante progresiones aritméticas y progresiones geométricas, a través de elementos teóricos de la teoría de grupos.
2. Teoremas de isomorfía en cuadrados mágicos, para construir nuevos cuadrados mágicos a través de las simetrías del grupo diedro D_4 .
3. Teoremas de construcción de cuadrados mágicos, usando matrices y grupos de transformaciones.

A nivel de aplicaciones a la enseñanza, se encontró, al hacer la observación etnográfica al estudiante (co-autor), que hay un alto grado de motivación hacia el estudio del Álgebra abstracta cuando se combina con los cuadrados mágicos y la programación.

5. Conclusiones

Este es el primer trabajo de investigación que combina elementos del Álgebra abstracta con cuadrados mágicos. Más aún, es la primera vez que se realiza esa combinación para buscar mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje de los estudiantes de matemáticas en Álgebra abstracta.

Adicionalmente, no solo se encontraron resultados matemáticos interesantes, publicables en revistas de matemáticas, sino que también se le dio una orientación a la enseñanza del Álgebra abstracta.

6. Referencias bibliográficas

- Acosta-Humánez, P. B. (2010). *Galoisian Approach to Supersymmetric Quantum Mechanics: The integrability analysis of the Schrödinger equation by means of differential Galois theory*. VDM Publishing.
- Acosta-Humánez, P. B. (2014). *Métodos algebraicos en sistemas dinámicos*. Ediciones Universidad del Atlántico, EMALCA.
- Acosta-Humánez, P. B. (2003). Teoremas de isomorfía en grupos diedros. *Lecturas Matemáticas*, 24, 123-136.
- Bosch M., Gascón J., & Nicolás, P. (2018). Questioning Mathematical Knowledge in Different Didactic Paradigms: the Case of Group Theory. *Int J Res Undergrad Math Educ* 4(1):23-37.
- Charris, J., Aldana, B., & Acosta-Humánez, P. (2013). *Álgebra. Fundamentos, Grupos, Anillos, Cuerpos y Teoría de Galois*. Bogotá, Academia Colombiana de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales.
- Corry, L. (2016) Algebra. In: *Encyclopædia Britannica*. <https://global.britannica.com/topic/algebra/Structural-algebra>. Acceso 11 Aug 2020.
- Dubinsky E, Dautermann J., Leron U., Zazkis R. (1994). On learning fundamental concepts of group theory. *Educ Stud Math* 27:267-305
- Everitt, D., & Racinski, F. (2020). Creative Visualisation of Magic Squares. *Proceedings of EVA London 2020* 30, 217-224.
- Fukawa-Connolly T., Johnson E., Keller R. (2016). Can Math Education Research Improve the Teaching of Abstract Algebra? *Not Am Math Soc* 63(3):276-281
- Hausberger, T. (2020). Abstract Algebra Teaching and Learning. *Encyclopedia of Mathematics Education*, 5-9.
- Hausberger, T. (2017). The (Homo)morphism Concept: Didactic Transposition, Meta-discourse and Thematisation. *Int J Res Undergrad Math Educ* 3:417-443
- Hausberger, T. (2018). Structuralist Praxeologies as a Research Program on the Teaching and Learning of Abstract Algebra. *Int J Res Undergrad Math Educ* 4(1):74-93
- Larsen, S. (2013). A local instructional theory for the guided reinvention of the group and isomorphism concepts. *J Math Behav* 32(4):712-725
- Waerden BLv. (1930). *Moderne Algebra*. Berlín.
- Wussing, H. (2007). *The Genesis of the Abstract Group Concept*. Dover Publications, Mineola