1.er CONGRESO CARIBEÑO DE INVESTIGACIÓN EDUCATIVA

ISFODOSU

Comprensión del concepto de curva a partir de transiciones entre lo discreto y lo continuo en el contexto del cálculo

Understanding of the Concept of Curve from Transitions Between the Discrete and the Continuous in the Context of Calculus

Carlos Mario Pulgarín Pulgarín[1] **Carlos Mario Jaramillo López**[2] **René Alejandro Londoño Cano**[3]

Resumen

La formalización de algunos conceptos matemáticos se realiza sobre curvas, ya sea desde una perspectiva geométrica, numérica o algebraica. Sin embargo, al analizar la curva como concepto intrínseco en el contexto del cálculo, considerando sus aspectos discreto y continuo, surgen interrogantes sobre la manera como podría incidir en la comprensión de conceptos tales como los de derivada e integral. De allí que, el presente escrito enfoque su interés en analizar las relaciones que establecen los estudiantes al abordar tales conceptos, y la manera como intervienen los procesos de razonamiento infinito para su comprensión en el marco de la teoría de Pirie y Kieren (PK), usando la metodología TEM (*Teacher Experiment Methodology*).
Finalmente, se sustenta la pertinencia de la teoría PK con la comprensión del concepto de curva y su posterior estructuración en un TEM, a partir de los resultados obtenidos de la triangulación con los cuestionarios, entrevista e informe de observación de campo.

Palabras clave: curvas, comprensión, transiciones.

Abstract

The formalization of some mathematical concepts is carried out on curves, either from a geometric, numerical or algebraic perspective. However, when analyzing the curve as an intrinsic concept in the context of calculus, considering continuos and discrets aspects, then questions arise about how it could affect the understanding of concepts such as derivative and integral. Hence, this paper focuses its interest in analyzing the relationships established by students when addressing such concepts, and the way in which infinite reasoning processes intervene for their understanding within the framework of the Pirie and Kieren (PK) theory, using TEM (Teacher Experiment Methodology) methodology.
Finally, the relevance of PK theory is supported with the understanding of the curve concept and its subsequent structuring in a TEM, from the results obtained from the triangulation with the questionnaires, interview and field observation report.

Keywords: curves, understanding, transitions.

[1] Universidad de Antioquia, https://orcid.org/0000-0002-0537-009X, carlosm.pulgarin@udea.edu.co
[2] Universidad de Antioquia, http://orcid.org/0000-0002-3937-5032, carlos.jaramillo1@udea.edu.co
[3] Universidad de Antioquia, http://orcid.org/0000-0003-2073-3474, rene.londono@udea.edu.co

1. Introducción

Este estudio centra su interés en la comprensión del concepto de curva al abordar el estudio del cálculo en los primeros semestres de universidad, específicamente en relación con los conceptos de derivada e integral en el plano, pretendiendo responder la pregunta ¿Cómo es el proceso de comprensión del concepto de curva en las transiciones entre lo discreto y lo continuo en el marco de la teoría de Pirie y Kieren? Para ello, se parte de los conceptos de continuidad y razonamiento infinito como preámbulo a una serie de definiciones consideradas por autores tales como Newton & Melander (1762), Tarrés (1998) y Cambray (1998) sobre el concepto de curva. Estas definiciones ponen en evidencia dificultades en procesos de razonamiento infinito que presentan los estudiantes al abordar los temas de derivada e integral y para los cuales se analizan posibles implicaciones en la comprensión del concepto de curva en el marco de la teoría de Pirie y Kieren (PK), en estrecha relación con los *Teaching Experiment Methodology* (TEM).

2. Fundamentación teórica

El rastreo de carácter histórico-epistemológico del concepto de curva, ha permitido sistematizar cronológicamente la evolución del mismo y considerar elementos diferenciadores en su estudio a través del tiempo, lo que indica la necesidad de analizar su estrecha relación con los conceptos formales de derivada e integral.

Newton & Melander (1762) parecen percibir la curva como una trayectoria descrita por puntos en movimiento abandonando el uso de cantidades infinitesimales. Por su parte, Leibniz considera que una curva se concibe a partir de un polígono de infinitos lados de longitud infinitesimal. Sin embargo, desde otra perspectiva la definición de Cauchy de funciones continuas llevó nuevamente a la reflexión sobre el concepto de curva al entrar en la discusión entre la continuidad puntual y uniforme. En consecuencia, la comprensión del concepto de curva parece involucrar diversas acciones y expresiones mentales, para lo cual se hace necesario reconocer atributos, representaciones y relaciones entre variables.

Se puede apreciar que Newton, Leibniz y Cauchy logran consolidar conceptos basados en los aportes de ilustres matemáticos que les antecedieron; sin embargo, frente al concepto de curva dejan en evidencia diferencias cuya discusión sigue vigente, y es precisamente este hecho, el que hace necesario enfocar el debate acerca de su comprensión, esto en gran medida porque la comprensión del concepto de curva no se limita a un aspecto lineal y homogéneo, en ella están inmersas una serie de elementos que deben considerarse. Al respecto, Hitt (2003) plantea:

> Si la enseñanza del cálculo se restringe a sus aspectos algebraicos sin poner atención al uso de representaciones diferentes a las algebraicas, difícilmente los alumnos llegarán a una comprensión profunda del cálculo. Es difícil concebir que un alumno pueda entender el cálculo sin haber desarrollado, por ejemplo, habilidades visuales ligadas a la construcción de conceptos del cálculo (p. 1).

Los estudiantes suelen construir una imagen limitada del concepto y en el caso de una curva, dicha limitante afecta directamente la elaboración de otros conceptos vinculados como lo son el de derivada e integral, «al tomar atributos no relevantes como si lo fueran para la definición del concepto» (Tall y Vinner, 1981, p. 152). De allí que el presente estudio adopte los experimentos de enseñanza (Cobb & Steffe; Steffe & Thompson, 2000; Stylianides & Stylianides, 2013) para intentar dar respuesta al problema de comprensión inmerso en el concepto de curva y apoyar el aprendizaje de los estudiantes a partir de explicaciones teóricas a la luz de la teoría PK, que postula niveles de comprensión para conceptos matemáticos particulares.

Pirie y Kieren (1994) conciben en su modelo que cada nivel de comprensión, más allá del conocimiento primitivo, está compuesto por características tales como las complementariedades de la acción y la expresión, y el *folding back*, aspectos estrechamente ligados, pero claramente diferenciados, que, en su conjunto, permiten el crecimiento de la comprensión. La complementariedad de la acción puede abarcar actividades tanto mentales como físicas, y la complementariedad de la expresión puede revelar a los demás o a sí mismo la naturaleza de las actividades. En este sentido, y considerando la comprensión como un proceso, es que los TEM pueden articularse con la teoría PK, ya que cada fase del experimento de enseñanza trae consigo acciones, y aunque, la expresión verbal no es estrictamente necesaria, es solo a través de la exteriorización que se puede evidenciar la comprensión que el estudiante está construyendo. Para el experimento de enseñanza considerado en este estudio, se abordaron los 4 primeros niveles del modelo PK, así como también las estructuras cognitivas de los estudiantes a partir del concepto imagen y del concepto definición, según Tall & Vinner (1981).

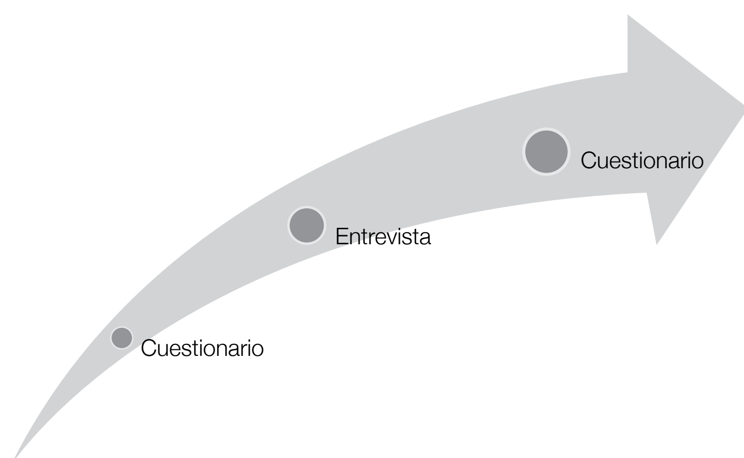
3. Metodología

Son diversas las investigaciones que abordan la comprensión en matemáticas y que han permitido comprobar dificultades en su proceso de aprendizaje. Sánchez, García, & Llinares, (2008) hacen alusión a una serie de resultados de investigaciones en torno a la comprensión de los conceptos de derivada e integral, los cuales están en estrecha relación con procesos de razonamiento infinito. Sin embargo, es necesario propiciar investigaciones que permitan no solo identificar dificultades sino también establecer cómo podría ser el proceso de comprensión de los conceptos en cuestión. Por tal motivo, para responder a la pregunta de investigación, se utilizará una metodología apoyada en un enfoque cualitativo (Hernández, Fernández, & Baptista, 2014, p. 11), bajo el cual se someterá la comprensión (objeto de estudio) y el concepto de curva (objeto matemático) a la influencia de ciertas categorías (representaciones gráficas, expresiones algebraicas, procedimientos, argumentación, etc.) en condiciones controladas (cursos de cálculo diferencial e integral de programas académicos de la Universidad de Antioquia) para observar los resultados que las mismas pueden producir en los respectivos objetos en cuestión.

Los cursos de cálculo hacen parte de los planes de estudio de muchos programas académicos universitarios. Allí convergen estudiantes según el Ministerio de Educación Nacional de Colombia (2006), con una formación previa del cálculo impartido en la secundaria y los cuales harán un uso variado de los elementos conceptuales de tales cursos de acuerdo con sus intereses profesionales. Dada su intensidad horaria, el rigor de los cursos y perfiles de los estudiantes que ingresan a los programas de las facultades de Educación e Ingeniería de la Universidad de Antioquia, resulta pertinente desarrollar la investigación teniendo en cuenta esta población. Esto con el fin de explorar y contrastar y analizar, con base en los enfoques y su formación profesional, la comprensión que los estudiantes tienen del concepto de curva.

Fundamentado en lo anterior, se sustenta la pertinencia de la teoría PK con la comprensión del concepto de curva y se intenta enfocar los esfuerzos en indagar cómo es posible estructurar un TEM (*Teaching Experiment Methodology*), el cual está enmarcado en el paradigma metodológico de la investigación de diseño (también llamada investigación basada en el diseño) con el fin de articularlos y de este modo dar respuesta a la pregunta de investigación planteada.

Figura 1
Proceso dirigido en la implementación de los instrumentos



Fuente: elaboración propia.

Los instrumentos tales como cuestionario y entrevista (fig. 1) forman parte de elementos de recolección de información dentro del TEM, el cual estará estructurado con base en las fases y acciones que se presentan a continuación:

Tabla 1
Estructura del TEM

TEM		
Fase	**Acciones**	**Descripción**
I **Preparación del experimento**	Problema de investigación.	Formulación de la pregunta de investigación, justificación del interés y necesidad de hacer el estudio y planteamiento de objetivos.
	Sujetos participantes del estudio.	Elegir, justificar la elección y describir los sujetos participantes del estudio.
	Diseño	Diseñar en qué va a consistir la secuencia de intervenciones en el aula.
	Metodología de enseñanza.	Identificar metodologías de enseñanza adecuada para el contenido a abordar en el aula según el objetivo de investigación planteado.
	Hipótesis de investigación.	Elaborar hipótesis de investigación relativas al problema de estudio, que pueden ser contrastadas a partir de las intervenciones en el aula.
	Intervención	Diseñar la siguiente intervención teniendo en cuenta el análisis de los datos ya recogidos, la búsqueda bibliográfica realizada, los conocimientos previos de los estudiantes y el trabajo efectuado en el aula.
	Redefinir	Elaborar hipótesis sobre los resultados por obtener en las intervenciones por realizar. Intentar prever las posibles reacciones de los estudiantes y las dificultades que puedan presentarse.

(Continuación)

II **Experimentación y análisis preliminar**	Intervención en el aula.	Modificar de forma justificada el diseño de la intervención, si se considera conveniente de acuerdo con los objetivos concretos de la intervención.
	Diseño y formulación de hipótesis.	Contrastar los resultados con la hipótesis previamente elaborada.
	Recolección de datos.	Recolección exhaustiva de datos mediante grabaciones de audio o video, evidencia de hojas de trabajo de los estudiantes, toma de notas, etc. Analizar los datos recogidos en el aula. Toma de nota por parte del investigador-docente (en caso de que lo considere necesario) sobre las intervenciones, que complementen y ayuden al análisis de los datos recogidos.
III **Análisis retrospectivo**	Organización de datos.	Realizar la transcripción de las grabaciones realizadas. Sistematizar los datos obtenidos.
	Análisis de datos.	Analizar todos los datos de forma conjunta. Dar respuesta si es posible a los objetivos del estudio. Contrastar los resultados. Elaborar un modelo que describa el aprendizaje o desarrollo de los alumnos, de los docentes o de las tareas realizadas, de los cambios que son considerados aprendizaje o desarrollo de los alumnos a lo largo del experimento de enseñanza, entendiendo estos como ocasionados por las maneras de operar y las situaciones puestas en juego por el investigador-docente.

Fuente: elaboración propia.

A partir de los informes obtenidos de las observaciones dentro del trabajo de campo del TEM y los instrumentos cuestionarios y entrevista, se sistematiza y triangula la información con el fin de analizar el proceso en el marco de la teoría PK.

4. Resultados

El hecho de que el conocimiento consista en una relación de significados, también se destaca en la naturaleza constructiva del aprendizaje y su consecuencia más inmediata, que el conocimiento previo puede afectar considerablemente lo que el alumno comprende y aprende. Artigue (1995) menciona que «hay dificultades para que los jóvenes de primeros semestres de universidad logren una comprensión satisfactoria de los conceptos y métodos de pensamiento que conforman el centro del análisis matemático. Por ejemplo, algunos estudiantes son capaces de resolver ejercicios propuestos solo con la aplicación correcta de las reglas de derivación, sin embargo, tienen dificultades cuando necesitan el significado de la noción de derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente» (Citado por Sanchez-Matamoros, 2008, p. 269).

5. Conclusiones

El estudio de la comprensión del concepto de curva en el marco de la teoría PK, puede aportar elementos de gran relevancia para la educación matemática en lo concerniente al cálculo diferencial e integral, considerando la estrecha relación entre los aspectos discreto y continuo a partir de procesos de razonamiento infinito.

La experiencia en el aula es un espacio académico en el cual emergen un sinnúmero de aspectos relacionados con la comprensión de conceptos. Para el caso del concepto de curvas, se puede observar que este espacio, sustenta la necesidad de una fina discusión y formalización de la tríada: discreto, continuo e infinito. Y para efectos del desarrollo del presente estudio doctoral con base a los fundamentos históricos y epistemológicos del concepto de curva, se parte de la premisa de que el concepto de curva subyace a los conceptos de derivada e integral.

En relación con esta última consideración, resulta pertinente el diseño de un TEM que articulado a la teoría PK consolide resultados conducentes a determinar cómo es el proceso de comprensión de los estudiantes cuando enfrentan transiciones entre lo discreto y lo continuo en relación al concepto de curva, en el contexto del cálculo.

6. Referencias bibliográficas

Cambray, R. (1998). *Análisis de los infinitamente pequeños para el estudio de las líneas curvas*. México: UNAM.

Cobb, P., & Steffe, L. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for research in mathematics education*, *14*(2), 83-94.

Hernández, R., Fernández, C., & Baptista, M. (2014). *Metodología de la investigación, Sexta edición*. México DF, México: McGraw Hill.

Hitt, F. (Enero, 2003). Dificultades en el aprendizaje del cálculo. *Versión preliminar presentada en el undécimo Encuentro de Profesores de Matemáticas del Nivel Medio Superior*. Morelia, México: Universidad de Quebec.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia [MEN] (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas*. https://r.issu.edu.do/l?l=558rpw

Newton, I., & Melander, D. (1762). *Tractatus de quadratura curvarum.* Zurich, Alemania: Public domain mark.

Pirie, S., & Kieren, T. (1994). Growth in mathematical understanding: How can we characterise it and how can we represent it? *Educational Studies in Mathematics*, *26*(2-3), 165-190. https://doi.org/10.1007/BF01273662

Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*. *11*(2). 267-296

Steffe, L. P., & Thompson, P. W. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In R. Lesh & A. E. Kelly (Eds.), *Research design in mathematics and science education* (pp. 267-307). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Stylianides, A., & Stylianides, G. (2013). Seeking research-grounded solutions to problems of practice: classroom-based interventions in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, *45*, 333-341. DOI:10.1007/s11858-013-0501-y

Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169. https://r.issu.edu.do/l?l=5603ZQ

Tarrés, J. (1998). *Sobre la historia del concepto topológico de curva*. En A. Durán (ed.). Historia de la gaceta (pp. 59-77). Sevilla, España. https://r.issu.edu.do/l?l=5592IQ