



Proceso didáctico del álgebra lineal en las tres dimensiones

Didactic Process of Linear Algebra in the Three Dimensions

Mario Cavani¹

Resumen

Se presenta un proceso constructivo de un problema didáctico que aborda el estudio del álgebra lineal en la «Licenciatura en Matemática orientada a la Educación Superior», carrera que se dicta en el Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña de la República Dominicana. El problema está relacionado con la búsqueda de un modelo adecuado para la enseñanza de estos saberes a los futuros maestros que se desenvolverán profesionalmente en la educación secundaria dominicana teniendo en cuenta el nuevo currículo presentado por el Ministerio de Educación de República Dominicana. El proceso se plantea en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), sustentada en la heurística de un patrón que se inscribe en las tres dimensiones que caracterizan un problema didáctico, como lo son: la epistemología, la economía y la ecología. Se recorre desde la problemática didáctica del docente hasta la problemática fundamental relacionada con el currículo.

Palabras clave: didáctica, teoría antropológica, álgebra lineal.

Abstract

A constructive process of a didactic problem that addresses the study of linear algebra in the “Bachelor of Mathematics Oriented to Higher Education” is presented. This degree belongs to the “Salomé Ureña Higher Teacher Training Institute” in the Dominican Republic. The problem is related to the search for an adequate model for the teaching of this knowledge to future teachers who will develop professionally in Dominican secondary education, taking into account the new curriculum presented by the Ministry of Education of the Dominican Republic. The process is proposed within the framework of the anthropological theory of the didactic (TAD), supported by the heuristics of a pattern that is inscribed in the three dimensions that characterize a didactic problem, such as: epistemology, economics and ecology. It goes from the didactic problems of the teacher to the fundamental problems related to the curriculum.

Keywords: didactic, anthropological theory, linear algebra.

¹ ISFODOSU, 0000-0002-2482-4253, mario.cavani@isfodosu.edu.do

1. Introducción

Este trabajo presenta un proceso didáctico para el Álgebra Lineal (el cual será referido como PDAL) que se imparte a los estudiantes de la «Licenciatura en Matemática orientada a la Educación Superior», carrera que se cursa en el Instituto Superior de Formación Docente Salomé Ureña de la República Dominicana a partir de la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (la cual en lo sucesivo será referida como TAD). Esta teoría fue planteada por Chevallard a finales de los años ochenta, y ha creado una enorme escuela de seguidores, no solo en Francia, sino también en España y Latinoamérica.

Este estudio se realiza, mientras avanza la puesta en práctica del «Diseño Curricular para el Nivel Secundario» por parte del Ministerio de Educación de República Dominicana en 2016, donde se plantean cambios concretos para la Educación Secundaria dominicana, y que ha propiciado la creación de la Licenciatura ya mencionada.

En virtud de todo el planteamiento institucional señalado, es por lo que el proceso didáctico en estudio se hace desde la visión de la TAD, la cual predice que los cambios que experimentan las instituciones forzosamente van a producir cambios epistemológicos en la enseñanza de los saberes por medio de procesos que, como se verá, describen y caracterizan el caso específico de la matemática (Chevallard, 1985, 1994). La investigación didáctica planteada desde el marco metodológico de la TAD requiere de la descripción de aspectos relacionados con las tres dimensiones fundamentales del problema didáctico: la epistemológica, la económica y la ecológica (Gascón, 1999; Gascón, 2011; Gascón & Bosch, 2019; Lucas & Gascón, 2019). El PDAL al que se refiere este trabajo se ubica en el hábitat de lo que se estima son los contenidos de saberes que se imparten en cursos universitarios para ingenieros, científicos y profesores de matemática (puros y educadores).

Estos saberes se relacionan de manera directa con la versión abstracta de *Espacios Vectoriales* buscando que los estudiantes sean capaces de visualizar que esta estructura general contempla de manera particular muchos de los objetos matemáticos que se han venido manipulando como las rectas y los planos que contienen el origen, el espacio tridimensional, polinomios, matrices y muchos otros. En cada uno de estos conjuntos sus elementos pasan a ser «vectores» los cuales pueden tratarse de manera general.

2. Fundamentación teórica

El objeto de estudio en este trabajo abarca desde las tareas y ejercicios realizados en la clase y en casa, extendiéndose más allá al adoptar un punto de vista institucional por medio del enfoque originado con las primeras teorías de los procesos de transposición didáctica (Chevallard, 1985) bajo el cual se plantea la imposibilidad de interpretar la matemática que se estudia ni la actividad matemática en la escuela, sin considerar el estudio de los fenómenos que tienen su origen en las instituciones que generan y (re)construyen los saberes matemáticos.

Por la complejidad del problema de la Educación Matemática (Gascón, 2002), se postula la necesidad de generar procedimientos unificados que permitan reformular y abordar en

conjunto todos los aspectos del problema. Existe la tendencia generalizada a no hacer cuestionamientos explícitos sobre el modelo epistemológico adoptado en los trabajos de Educación Matemática, debido a que se considera que pertenece a la institución matemática y escapa del control del didacta. Chevallard introdujo la noción clave en la TAD conocida como praxeología matemática (referida por PM) (Chevallard, 1999, 2002a, 2002b) que permite modelar de manera explícita y contrastable la actividad matemática como una actividad humana dentro del conjunto de actividades en las instituciones sociales. Chevallard postula y materializa por medio de la TAD la crítica a la visión particularista del mundo social como premisa básica. Por medio de la praxeología se tiene la posibilidad de considerar tanto la dimensión teórica como la dimensión práctica de los saberes como entes perfectamente coordinados.

De acuerdo con Chevallard (2006): Una praxeología se concibe como la unidad básica en que se puede analizar la acción humana en general. Un principio fundamental del TAD, establece que no pueden existir acciones humanas plausibles de ser, al menos parcialmente, «explicadas», hechas «inteligibles», «justificadas», «contabilizadas» en cualquier modo de «razonamiento» que pueda sustentar dicha explicación o justificación. La *praxis*, por tanto, implica el logos que, a su vez, implica volver a la *praxis*. De modo que toda *praxis* requiere un apoyo en el logos para poder justificar los cuestionamientos que inexorablemente van a aparecer. Por lo tanto, la praxeología va a necesitar disponer de técnicas eficaces que permitan una «forma de hacer» en la que su componente «logos» proporcione soporte y justificación completa a la acción humana en cuestión (Bosch & Gascón, 2007).

3. Metodología

La construcción del PDAL, se plantea asumiendo los fundamentos teóricos planteados, entre otros, por Barquero, Bosch y Gascón (2013) donde establecen que todo problema de investigación en didáctica de la matemática posee tres características fundamentales que denominan las tres dimensiones de un problema didáctico: la dimensión epistemológica, la dimensión económica, la dimensión ecológica. Esta visión amplía radicalmente el problema docente y su correspondiente problemática básica.

Se utilizará el patrón heurístico propuesto en el trabajo recién citado, donde la formulación inicial pero incompleta del problema docente se acompaña de una *dimensión epistemológica* previa del problema, que incluye las cuestiones relativas a la naturaleza, funciones y razones de ser de las obras objeto de estudio; de una *dimensión económica*, donde se presentan aspectos relacionados con la forma de organizar e interpretar las obras a estudiar y lo que se hace en la institución de referencia para enseñar y aprender dichas obras; y de una *dimensión ecológica*, que contiene los aspectos que contemplan el conjunto de condiciones y restricciones que permiten, inciden, restringen o incluso impiden la permanencia en la institución de referencia de las praxeologías matemáticas y didácticas involucradas.

De acuerdo con este planteamiento, la TAD proporciona un modelo metodológico adecuado para el estudio de los procesos de la enseñanza de los saberes planteados en el PDAL. La praxeología matemática (PM) será la herramienta fundamental para modelizar las actividades

de la TAD. En esta metodología, el producto de la construcción proporciona una praxeología matemática, que genera otros procesos constructivos que finalmente desembocarán en un producto final que como un todo se le llama *praxeología didáctica* (que será referida por PD). Ambos aspectos se conciben como una unidad de los dos procesos, producto de la actividad humana, que, en este caso, es una actividad matemática. Un ente praxeológico genera una PD que se articula en tareas, técnicas, tecnologías y teorías las cuales tendrán su fundamentación en la didáctica. Para ser específicos, una praxeología se representa por una cuarteta $[T, \tau, \theta, \Theta]$, donde T representa las tareas, τ representa las técnicas que podrían permitir resolver las tareas, θ representa las tecnologías o herramientas teóricas que sustentan las técnicas, y finalmente, Θ representa la teoría general que sustenta todo el proceso.

Las teorías didácticas que aparecen en la TAD (Gascón, 1998) usualmente cuestionan a los *modelos epistemológicos dominantes* (que serán referidos por MED) que genera el «saber sabio», por lo que es necesario analizar las incidencias de estos modelos en las prácticas docentes de las instituciones que los sustentan (Gascón, 2001). Es aquí donde la TAD comienza su acción al plantear la necesidad de construir desde la didáctica un modelo epistemológico para el ámbito de la actividad matemática cuestionada conjuntamente con sus problemas didácticos asociados. Como consecuencia, se generarán procesos de creación que deben producir un *modelo epistemológico de referencia* (será referido por MER) como resultado del análisis de todos aquellos procesos previos que constituyen lo que Chevallard (1994) denomina la *transposición didáctica*, entendida como el conjunto de mecanismos mediante los cuales se logra en definitiva concebir y llegar desde el saber sabio al saber enseñado.

Una vez logrado el establecimiento del MER este será el modelo de referencia para el análisis de las PM institucionales y servir de sustento para las PD que surjan como propuestas. Entre varios trabajos realizados con esta metodología, bajo esta visión cuestionadora del MED, se asegura que muchos de los fenómenos relacionados con la enseñanza de la matemática solo permiten un abordaje científico cuando se tienen en cuenta los procesos de transposición didáctica que regulan las transformaciones que experimenta el saber matemático producido en la institución del «saber sabio», para convertirlo en saber matemático «apto para ser enseñado». Finalmente, el patrón heurístico propuesto en el trabajo citado, simbólicamente se expresa así:

$$\{[(P_0 \oplus P_1) \subseteq P_2] \subseteq P_3\} \subseteq P_\delta.$$

Donde P_0 representa una formulación inicial pero incompleta del problema docente; P_1 representa la dimensión epistemológica del problema; P_2 es la dimensión económica; P_3 representa la dimensión ecológica. Con el signo $\oplus$ se denota que dado al problema docente P_0 se requiere asociar un componente epistemológico P_1 con el objetivo de ir conformando un problema didáctico. El símbolo $\subseteq$ indica que para obtener una mejor formulación del problema se requiere de cierta formulación previa de los P_i que le anteceden (aunque sea de manera implícita). Finalmente, P_δ indica la formulación de un problema didáctico que contiene las

tres dimensiones fundamentales del problema, las relaciones entre ellas, así como los nuevos elementos que lo mejoran y enriquecen.

Este patrón general que modela el proceso no es taxativo ni normativo con respecto a los procesos de investigación. En efecto, en Gascón (2011) se aclara que, P_0 es especialmente «visible» en los inicios del proceso del desarrollo de la didáctica de la matemática requerida (tal como pudiera ser en la etapa actual del problema en consideración en el ISFODOSU aquí planteado), y no constituye una dimensión necesariamente presente en todos los problemas didácticos. Por otra parte, las dimensiones P_1 , P_2 , y P_3 no necesariamente deben recorrer-se siguiendo un orden preestablecido y completo. De igual forma, se recomienda que, al construir un proceso didáctico por medio de la TAD, se busque la confluencia y articulación dialéctica de las tres dimensiones fundamentales del problema (Gascón, 2011).

4. Resultados

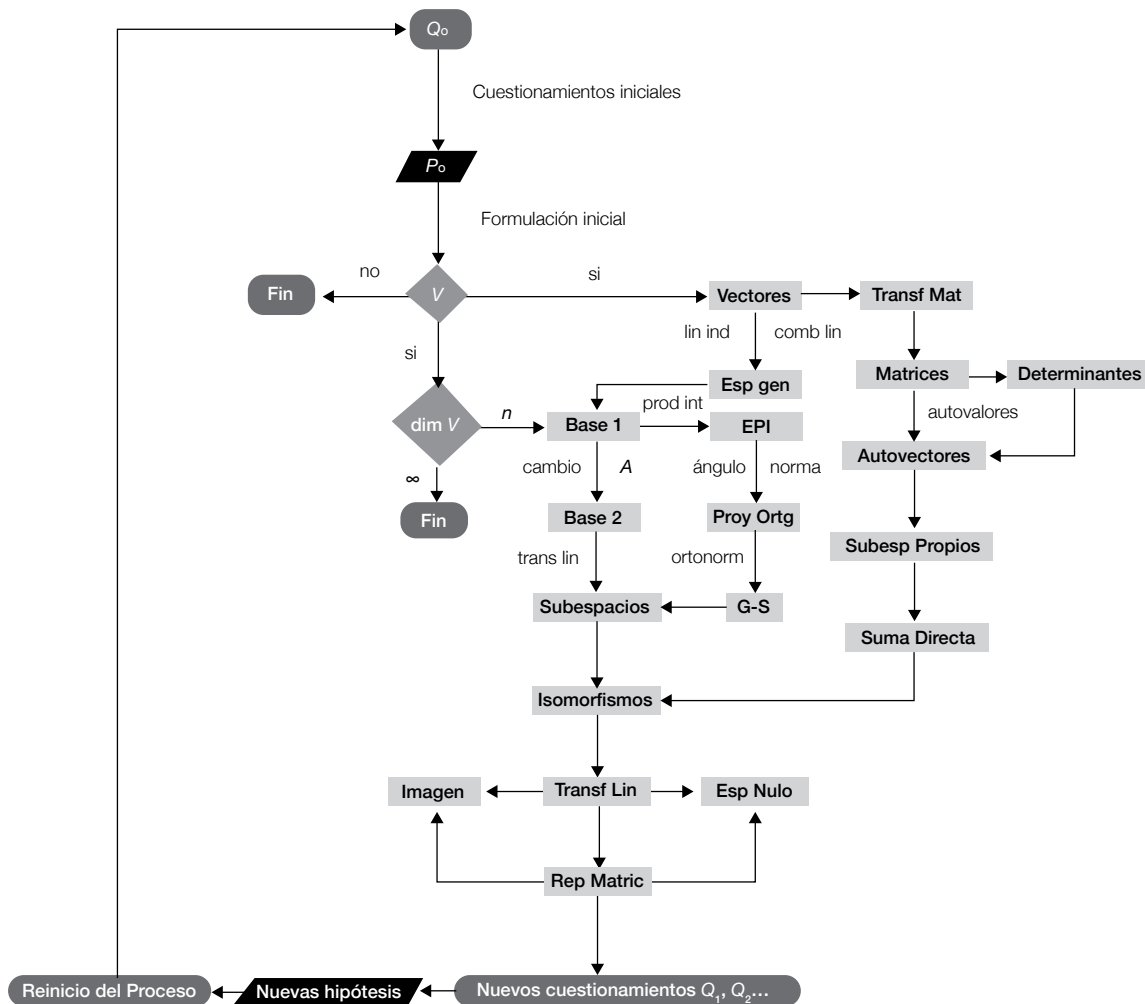
Tal como lo señala la TAC, no se puede desligar el saber a enseñar como parte esencial de un sistema didáctico. Cuando se emprende la tarea de llevar a cabo la enseñanza del Álgebra Lineal al nivel que se ha señalado en este trabajo, en principio los estudiantes tienen algún conocimiento del tema, pero que no ha sido abordado desde un punto de vista globalizador, como el que se aspira. De modo que la formulación inicial del problema docente P_0 se presenta como parte indisoluble del proceso tanto para el docente como para el estudiante. En el paso de la escuela secundaria a la universitaria, por lo general, permite que los estudiantes posean algunas ideas de ciertos temas concernientes al Álgebra Lineal.

Por lo general, estos conocimientos se pueden pensar como un conjunto de procedimientos operativos que permiten resolver ecuaciones lineales donde se debe determinar un cierto número de variables; resolver ciertos problemas operativos con matrices, calcular determinantes de ciertas matrices cuadradas (hasta el orden 3×3), y otras tareas operativas. Sin embargo, para un nivel universitario con estudiantes que están a más de la mitad de su carrera, el Álgebra Lineal posee características de ser un curso cuyos temas aparecen como parte importante de otras especialidades, y esto da razón para que se deba constituir en uno de los primeros cursos que deba abordarse con toda una axiomática mediante la cual se desarrollen los aspectos teóricos que presenten de manera clara su *logos* para sustentar todas las tecnologías y técnicas que permitan a los estudiantes resolver las *tareas* tanto operativas como sus aplicaciones.

Las dificultades para el aprendizaje de los distintos temas del Álgebra Lineal se deben a que esta asignatura posee, en sus orígenes epistemológicos, una componente geométrica, y una fuerte componente teórica que la enriquece, con un carácter globalizador. Se presenta así un problema de transposición matemática que, originado institucionalmente en la educación secundaria, debe ser tomado por el docente para desde P_0 producir la transposición didáctica que permita dar razón de ser al proceso didáctico que se busca. Todo lo antes señalado implica que la asunción (más o menos explícita) de un modelo epistemológico específico P_1 del dominio de la actividad que presente. El punto de vista epistemológico de este estado inicial puede

constituir un MER referencial inicial que puede ir transformándose con el avance del proceso. Para generar las praxeologías matemáticas necesarias se emprende un *recorrido de estudio e investigación* (que en lo sucesivo será referido por REI) consistente en la revisión de pensum, libros, sitios web y otras estrategias que permitan la comprensión y el abordaje del proceso, que en definitiva va a generar el MER como hipótesis científica para el PDAL. La TAD estudia fenómenos didácticos y, en consecuencia, la relevancia de un problema didáctico dependerá de la medida en que el estudio de este permita avanzar en el conocimiento de ciertos fenómenos. El REI que se encuentra en el caso de este trabajo se resume en el siguiente diagrama.

Gráfico
Diagrama del REI



Fuente: elaboración propia.

Diagrama del REI que produce el MER

Con respecto al diagrama, se puede observar que se parte de un conjunto V , del cual se decide si es un espacio vectorial o no; en este nivel no se consideran los espacios vectoriales de dimensión infinita salvo algunos casos importantes reseñables como el espacio de todos los polinomios y el espacio de las funciones continuas.

Abreviación	Significado
V	Conjunto para determinar si es un espacio vectorial.
$\dim V$	Decidir la dimensión de V .
Trans Mat	Se refiere a las transformaciones de vectores por medio de matrices.
Esp Gen	Es el espacio generado.
lin ind	Linealmente independiente.
comb lin	Combinación lineal.
produc int	Producto interior.
EPI	Espacio con producto interior.
cambio	Cambio de base, A es la matriz que produce el cambio.
trans lin	Transformación lineal.
Proy Ortg	Proyección ortogonal.
ortonorm	Ortonormalización.
G-S	Proceso de ortonormalización de Gram-Schmidt.
Rep Matric	Representación matricial de una transformación lineal.

En la tabla anterior se explica el uso de las abreviaciones que son utilizadas en el diagrama del REI. Como se puede observar las dimensiones económica y ecológica van a influir de alguna manera en el desarrollo del PDAL; sin embargo, un MER nunca está asociado meramente a un recorte y a una redefinición, de algún modo arbitrario, de cierto ámbito de la actividad matemática. El MER constituye una hipótesis científica que pretende sacar a la luz un fenómeno didáctico emergente de dicho ámbito.

En consecuencia, en la práctica efectiva de la investigación didáctica, la construcción de un MER y la progresiva formulación del problema de investigación avanzan en paralelo, se elaboran simultáneamente.

A medida que se van perfilando las características del MER será posible formular con más precisión algunas de las cuestiones que formarán parte de las dimensiones económica y ecológica del problema didáctico (así como las primeras respuestas tentativas) y, recíprocamente, al ir precisando dichas cuestiones será posible concretar los detalles de un MER indisolublemente asociado al problema didáctico en cuestión.

5. Conclusiones

En el ámbito de la actividad matemática universitaria y, en particular las que se relacionan con la enseñanza del Álgebra Lineal a un nivel avanzado de ingeniería o de un curso formativo para licenciados en Matemática, tanto en la matemática pura como para educadores de la escuela secundaria, se observa que los problemas didácticos factibles de formular y abordar están fuertemente condicionados con el modelo epistemológico dominante en el cual a esta materia se le percibe como una serie de métodos operativos para resolver ecuaciones lineales o para resolver determinantes de matrices cuadradas, entre otros.

Se propone una hoja de ruta para la construcción de un MER para el PDAL, la descripción de los fenómenos epistemológicos para el PDAL constituye el aporte fundamental del trabajo.

La institución escolar (universitaria en este caso) se constituye en un aspecto importante para el estudio de la economía de las praxeologías matemáticas escolares asociadas, las cuales permitirán la transposición didáctica necesaria que rompa con el MED.

En el caso del Álgebra Lineal, la praxeología debe buscar que el aprendizaje permita discernir por medio de la teoría general de los espacios vectoriales, de tal modo que los saberes enseñados permitan particularizar apropiadamente las tareas que se plantean con las técnicas apropiadas, sus tecnologías y teorías.

El estudio solo puede llevarse a cabo si se dispone de un punto de vista, de un sistema de referencia y de un MER del dominio matemático en cuestión.

El aspecto institucional de referencia señalado contiene los datos empíricos del MED, los cuales deben ser utilizados para construir el MER (además de ser este aspecto uno de los que interviene en los procesos de transposición didáctica) en el que van a aparecer, la *praxis* científica y la necesaria simultaneidad entre los procesos investigativos: epistemológico, económico y ecológico.

Como se puede intuir, cada uno de los procesos presentes en el diagrama propuesto es a su vez un problema didáctico a resolver. En tal sentido, la formulación del problema didáctico que el MER permite sacar a la luz indudablemente va a tener como consecuencia el cuestionamiento del currículo.

6. Referencias bibliográficas

- Barquero, B., Bosch, M., & Gascón, J. (2013). Las tres dimensiones del problema didáctico de la modelización matemática. *Revista de Educación Matemática de Sao Paulo*, 15(1), 1-28. <https://r.issu.edu.do/?l=58071V>
- Bosch, M., & Gascón, J. (2007). 25 años de transposición didáctica. En L. Ruíz-Higueras, A. Estepa y F.J. García (Eds.) *Sociedad, escuela y matemáticas. Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico* (pp. 385-406). Jaén: Universidad de Jaén. <https://r.issu.edu.do/?l=581dCz>
- Chevallard, Y. (1985). *La transposition didactique; du savoir savant au savoir enseigné*. Paris: La Pensée Sauvage. <https://r.issu.edu.do/?l=582wdM>

- Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266. <https://r.issu.edu.do/l?l=583oCw>
- Chevallard, Y. (2002a). Organiser l'étude 1. Structures et fonctions. En J.-L. Dorier et al. (Eds.), *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 3-22). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage. <https://r.issu.edu.do/l?l=584MEW>
- Chevallard, Y. (2002b). Organiser l'étude 3. écologie & regulation. En J.-L. Dorier et al. (Eds.), *Actes de la 11e École d'Été de didactique des mathématiques* (pp. 41-56). Grenoble, Francia: La Pensée Sauvage. <https://r.issu.edu.do/l?l=585gn3>
- Chevallard, Y. (2006). Steps towards a new epistemology in mathematics education. En Bosch 8Ed., *Proceedings of the iv congress of the european society for research in mathematics education* (pp. 21-30). Barcelona: FUNDEMI-IQS. <https://r.issu.edu.do/l?l=586NwI>
- Gascón, J. (2002). El problema de la Educación Matemática y la doble ruptura de la Didáctica de las Matemáticas. *Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 5(3), 673-69. <http://gaceta.rsme.es/abrir.php?id=125>
- Gascón, J. (2011). Las tres dimensiones fundamentales de un problema didáctico. El caso del álgebra elemental. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 14(2), 203-231. <https://r.issu.edu.do/l?l=587Std>